В.А. МАТВЕЕВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ УТОЧНЁННОГО ПО КОНУСУ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В работе изучается многокритериальная задача. В качестве её решения рассматриваются оптимальные по многогранному конусу исходы, определённые неотрицательной матрицей. Такое решение можно уточнять, рассматривая последовательность конусов, определённых степенями исходной матрицы. Предельная матрица определяет выпуклый конус, в данном случае это будет полупространство. Оптимальные решения по этому предельному конусу (полупространству) будем называть уточнённым по конусу оптимальным решением многокритериальной задачи. Указаны условия существования такого уточнённого решения и сформулированы условия, при которых уточнение выделяет единственный исход.

1. Оптимальность по конусу в многокритериальной задаче

Рассматривается задача принятия решения, результат в которой оценивается несколькими критериями. Используем терминологию и обозначения из [1, 2]. Моделью является многокритериальная задача. Это система

$$\langle\ X,\ f(x)\ \rangle. \tag{1}$$

Здесь имеется одно лицо, принимающее решение (ЛПР). Задано множество допустимых исходов $x \in X \subset R^n$, среди которых ЛПР делает свой выбор. Выделен конечный набор желаемых свойств или критериев. В модели эти свойства описаны функциями: каждая функция представляет одно свойство.

Обычно информацию о всех критериях объединяют в одну, векторную функцию выигрыша $f\colon X \to R^m$, $m \geq 1$. Значения этой функции каждому исходу ставят в соответствие количественную оценку для выделенных свойств $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Не уменьшая общности, считаем, что критерии $f_i(x)$, $i = 1,\ldots,m$, являются позитивными. Тогда, на содержательном уровне, цель ЛПР состоит в выборе такого исхода, что доставляет, возможно большие значения одновременно всем компонентам векторной функции выигрыша $f(x)$.

Достаточно общий подход к определению оценочной структуры в (1) предлагают конусные отношения. В многокритериальных и игровых задачах с векторными выигрышами такой подход представлен в [3, 4]. Будем рассматривать выпуклый, острый, многогранный (полиэдральный) пространственный конус K [1, с.42]. Конус порождает в векторном пространстве отношение порядка (векторную упорядоченность) $\geq_k$ по правилу

$$f \geq_k g \Leftrightarrow f - g \in K. \tag{2}$$

Такой конус K называют конусом доминирования в R^m, $m \geq 1$.

Часто рассматривается многогранный конус, который можно задать матрицей, именно,

$$K = \{\ f \in R^m \mid\ Af \geq 0_m\ \}. \tag{3}$$

Здесь представлена система m однородных неравенств и 0_m – нулевой вектор в R^m. Зафиксирована A – квадратная матрица порядка m. Будем считать, что матрица A = $(a_{ij}), i, j = 1,\ldots, m$ является неотрицательной, т.е. $a_{ij} \geq 0$. Кроме того, полагаем, что матрица A является невырожденной и, в специально оговорённых случаях, неразложимой [5, с.352].

Определение 1. Исход $x^* \in X$ называется оптимальным по конусу K в задаче векторной оптимизации (1), если $\forall\ x \in X$, вектор $x - x^* \notin K$. Если выполнено включение, $R^m_> \subset K$ то оптимальное решение $x^* \in X$ будем называть максимальным по конусу K.

Утверждение 1. Пусть в многокритериальной задаче (1) множество допустимых исходов $X \subset R^n$ компактно, векторная функция выигрыша $f\colon X \to R^m$ непрерывна, конус доминирования K является выпуклым, острым, многогранным пространственным в R^m. Тогда в (1) существует исход, оптимальный по конусу K.

Доказательство следует из существования гиперплоскости в R^m, разделяющей компактное множество X и соответствующий конус K.

Утверждение 2. Рассматривается многокритериальная задача (1) и конусы доминирования K_1, K_2. Пусть $X_1^* \subset X, X_2^* \subset X$ множества исходов, оптимальных по конусу K_1, K_2 соответственно. Тогда из $K_1 \subset K_2$ следует включение $X_2^* \subset X_1^*$.

Действительно, пусть $x^* \in X_2^*$. Тогда, согласно определению 1, $x - x^* \notin K_2$. По условию $K_1 \subset K_2$, значит $x - x^* \notin K_1$. Последнее означает, что $x^* \in X_1^*$. Следовательно $X_2^* \subset X_1^*$, что и требовалось доказать.

Предпочтение по конусу порождает определённые вопросы, связанные с наилучшим решением задачи (1). Во-первых, какие свойства, какой содержательный смысл имеют оптимальные по конусу решением. Во – вторых, каким образом выбирать конус доминирования, ведь таких конусов бесконечное множество. В – третьих, как уточнять оптимальное по конусу решение, если таких решений достаточно много.

Рассмотрим конус доминирования, представленный многогранным конусом (3) с неотрицательной невырожденной квадратной матрицей А = $(a_{ij}), i, j = 1,...,m$. Не уменьшая общности можно считать, что матрица А является стохастической [5, с.381]. У такой матрицы

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1, \ i = 1,...,m. \qquad (4)$$

Произвольную неотрицательную невырожденную матрицу можно привести к условию (4), вынося из каждой строки соответствующий множитель. Хотя матрица при таком преобразовании изменится, но конусы доминирования для исходной и преобразованной матриц будут совпадать.

Рассмотрим произвольную $i-$ ую строку стохастической матрицы А

$$(a_{i1}, a_{i2},..., a_{im}), \ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1, \ \ a_{ij} \ge 0, \ \ i, j = 1,...,m.$$

При определении оптимальности по конусу элементы этой строки умножаются соответственно на значения критериев, представленные в векторной функции выигрыша и складываются. Каждая строка матрицы А даёт новый $i-ый$ критерий F_i. При этом элемент $0 \le a_{ij} \le 1$ этой строки является «весовым коэффициентом», т.е. множителем или весом с которым исходный критерий $f_j(x)$ входит в новый критерий $F_i(x)$

$$F_i(x) = a_{i1} f_1(x) + a_{i2} f_2(x) + ... + a_{im} f_m(x).$$

2. Уточнение оптимального по конусу решения

В многокритериальной задаче (1) оптимальных по конусу решений может быть много. Рассмотрим схему, позволяющую уточнить решение или даже выделить единственный наилучший исход.

Обозначим через K_1 конус К из (3) и $X_1^* \subset X$ - соответствующее множество оптимальных по этому конусу решений. Этот конус определён матрицей А. Обозначим через K_2 и $X_2^* \subset X$ конус и множество оптимальных по нему решений для матрицы A^2. Аналогично для натурального n обозначим K_n и $X_n^* \subset X$ конус и множество оптимальных по этому конусу решений, определённых матрицей A^n.

Утверждение 3. Пусть матрица А является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда для любого n натурального

а) матрица A^n является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической;

б) для соответствующих конусов имеет место включение $K_n \subset K_{n+1}$;

в) для соответствующих множеств оптимальных по конусу решений имеет место включение $X_n^* \supset X_{n+1}^*$.

Пункт а) следует из правила умножения неотрицательных матриц. Многогранный конус K_n определяется как решение однородной системы линейных неравенств $A^n f \geq 0_m$. Многогранный конус K_{n+1} определяется как решение для следствия последней системы, именно, $A^{n+1} f = AA^n f \geq 0_m$. Напомним, что элементы матрицы А неотрицательны. Поэтому имеет место включение конусов $K_n \subset K_{n+1}$. Наконец, в) следует из утверждения 2.

Для матрицы А из утверждения 3 верны условия теоремы Фробениуса [5, с.355], именно, выполнено

Утверждение 4. Пусть матрица А является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда существует предел последовательности матриц

$$\lim_{n\to\infty} A^n = A_0 .$$

Матрица A_0 является положительной, вырожденной с рангом равным 1, все строки матрицы равны левому собственному вектору, относящемуся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$ и сумма координат этого вектора равна 1.

Определение 2. Рассматривается многокритериальная задача (1) и многогранный конус К (3), определённый квадратной матрицей А порядка m. Считаем, что матрица А является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Пусть вектор $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, \alpha_i > 0,$ является левым собственным вектором для собственного значения $\lambda = 1$ матрицы А. Тогда исход

$$x^* \in \arg\max_{x\in X}(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_m f_m(x))$$

будем называть уточнённым по конусу К оптимальным (максимальным) решением многокритериальной задачи (1).

Утверждение 5. Пусть в многокритериальной задаче (1) множество допустимых исходов $X \subset R^n$ компактно, векторная функция выигрыша f: $X \to R^m$ непрерывна, квадратная матрица А порядка m является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда в задаче существует оптимальное решение, уточнённое по конусу К, и этот конус определяется матрицей A_0, как это указано в утверждении 5.

Существование уточнённого решения следует их компактности множества допустимых исходов X и непрерывности функции

$$f(x,\alpha) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_m f_m(x),$$

где $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, \alpha_i > 0,$ есть левый собственный вектор матрицы А или, по другому, собственный вектор для строк матрицы А.

Суммируя результаты из вышеприведённых утверждений, получаем

Теорема. Пусть квадратная матрица А порядка m является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда

а) существует предел последовательности матриц

$$\lim_{n\to\infty} A^n = A_0 ;$$

б) предельная матрица A_0 является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической и все строки этой матрицы равны левому собственному вектору, относящемуся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$ $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, \alpha_i > 0;$

с) для последовательности матриц A^n, $n=1,2,\ldots$, соответствующая последовательность многогранных конусов $K_n, n=1,2,\ldots$, определённая аналогично (3), удовлетворяет цепочке включений

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots \subset K_0.$$

д) соответствующая последовательность множеств, оптимальных по конусу $K_n, n=1,2,\ldots$, решений в задаче векторной оптимизации (1) удовлетворяет включениям $X_1^* \supset X_2^* \supset X_3^* \supset \ldots \supset X_n^* \supset \ldots \supset X_0^*$.

3. Единственность уточненного по конусу решения

Уточнение оптимального по конусу решения позволяет в некоторых случаях выделить в задаче векторной оптимизации (1) единственный наилучший исход. Условия существования единственного уточнённого решения формулируются с использованием строгой вогнутости векторной функции цели [7, с.169].

Пусть множество допустимых исходов $X \subset R^n$ выпукло. Векторная функция векторного аргумента $f: X \to R^m$, $m \geq 1$, называется вогнутой (строго вогнутой) на множестве X, если каждая компонента этой функции является вогнутой (строго вогнутой) на этом множестве, т.е. для любых $i = 1,\ldots,m$, $x \neq y \in X$, выполнено неравенство $0{,}5(f_i(x)+f_i(y)) \leq f_i(0{,}5(x+y))$ $(0{,}5(f_i(x)+f_i(y)) < f_i(0{,}5(x+ \quad +y)))$.

Утверждение 8. Пусть в задаче векторной оптимизации (1) векторная функция $f: X \to R^m$, $m \geq 1$, будет вогнутой на компактном множестве $X \subset R^n$ и найдётся, по крайней мере, одно $j=1,\ldots,m$, что скалярная функция $f_j(x)$ будет строго вогнутой на этом множестве, многогранный конус K определён (3) квадратной матрицей А, которая является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда в задаче существует единственный уточнённый по конусу исход.

Согласно определению 2 уточнённым по конусу оптимальным решением многокритериальной задачи (1) является исход

$$x^* \in \arg\max_{x \in X}(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x)).$$

По теореме матрица А однозначно определяет левый собственный вектор, относящийся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$. Это вектор $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, \alpha_i > 0$. Тогда функция

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x)$$

является строго вогнутой, т.к. такими же являются и функции $f_i(x), i=1,\ldots,m.$ и, по крайней мере, одна из них строго вогнута. Тогда последняя линейная комбинация представляет строго вогнутую функцию. Наконец, строго вогнутая функция достигает максимального значения на компактном множестве в единственной точке [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ногин В.Д.** Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002.
2. **Розен В.В.** Математические модели принятия решений в экономике. М.: Книжный дом «Университет», Высшая школа, 2002.
3. **Вишнякова О.М.** Оптимальность по конусу в многокритериальной задаче. // Труды Псковского Политехнического института. Псков: Изд-во ППИ, №8.1. - С.7–11.
4. **Матвеев В.А.** Оптимальность по конусу в игровой задаче с векторными выигрышами. // Труды Псковского Политехнического института. Псков: Изд-во ППИ, №8.1. - С.11 – 20.
5. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1967.
6. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
7. **Васильев Ф.П.** Численные метода решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.