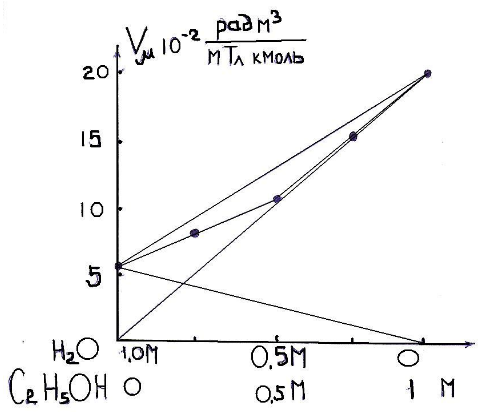

рис 1

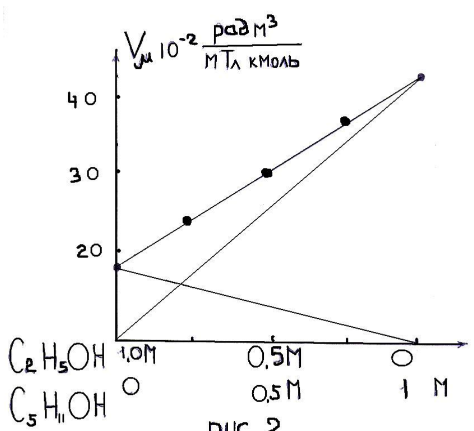

рис 2

Из рис. 1 следует, что при соотношении компонентов $0{,}5\,моля$ C_2H_5OH и $0{,}5\,моля$ H_2O наблюдается экзальтация магнитного вращения, соответствующая взаимодействию этих двух веществ.

Если же взять смесь C_2H_5OH и $C_5H_{11}OH$ (предельные одноатомные спирты), компоненты которой могут смешиваться в любом отношении, не взаимодействуя, то получим аддитивность магнитного вращения (рис. 2).

Измерение постоянной Верде производилось на установке с полутеневым анализатором, созданной на базе стандартного сахариметра [1]. Справочные данные взяты из справочника [3].

Таким образом, изучение эффекта Фарадея в смесях (растворах) позволяет изучать образование комплексов и соединений, диссоциацию молекул, свойства коллоидных растворов и другие проблемы физики и химии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Верхозин А.Н**. Магнитооптика диамагнетиков.- СПб.:изд-во СПбГТУ, 1999.
2. **Пентин Ю.А**., Вилков Л.В. Физические методы исследования в химии. – М.: Мир, 2003.
3. Справочник химика, под ред. Б.П.Никольского. – Т.1. – М.-Л.: Химия, 1966.

О.М.ВИШНЯКОВА

МОДЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ВВОДИМЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ

Рассматривается многокритериальная динамическая задачи при неопределенности и формализуется ее решение. Сформулированы необходимые условия существования седловых точек в форме принципа максимума. Полученные результаты применяются к математической модели освоения вводимых производственных мощностей.

1. Введение

Задача принятия решений в сложных системах имеет две особенности. Во первых, она имеет многокритериальный характер. Решение зачастую принадлежит области компромисса, когда улучшение качества по одному критерию, приводит к ухудшению по другому. Поэтому основную роль при принятии решения в такой ситуации играет выбор принципа оптимальности, объясняющего, в каком смысле одно решение лучше другого.

Во вторых, характерной особенностью задачи принятия решений является наличие неопределенности. Основным источником неопредееллнности является внешняя среда, а также ограниченные возможности ЛПР собрать и обработать информацию о решаемой проблеме.

В данной работе рассматривается математическая модель освоения производственных мощностей [4], которая является динамической многокритериальной задачей при неопределенности. Для оценки качества принимаемого решения используется принцип оптимальности по конусу [1]. Исследование многокритериальной задачи при неопределенности ведется в рамках принципа гарантированного результата [3]. Задачу принятия решений в условиях неопределенности можно трактовать как конфликтную ситуацию двух сторон, одной из которых является ЛПР, а другой – гипотетический индивид, формирующий неопределенность. При этом следует считать, что второй игрок действует так, чтобы максимально препятствовать ЛПР в достижении его целей. Таким образом для данной задачи вводится вспомогательная антагонистическая игра. Для построения седловой точки в программных стратегиях данной игры применяется принцип максимума Понтрягина [6].

2. Многокритериальная динамическая задача при неопределенности

Под многокритериальной непрерывной динамической задачей при неопределнности понимиается упорядоченная система

$$\mathbf{\Gamma} = \left\langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{U}, \mathbf{Z}, \{J_i(U,Z)\}_{i\in\mathbf{N}}, C, \mathbf{N} = \{1,2,\ldots N\} \right\rangle. \quad (1)$$

Здесь функционирование *управляемой динамической системой* $\mathbf{\Sigma}$ рассматривается на отрезке времени $[t_0, \vartheta]$, где $0 \le t_0 < \vartheta$ - фиксированные моменты начала и окончания процесса. Текущее состояние системы $\mathbf{\Sigma}$ в каждый момент времени t характеризуется *фазовым вектором* $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbf{R}^n$. Задано начальное состояние системы $\mathbf{\Sigma}$ $x(t_0) = x_0$. Изменение фазового вектора описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \varphi(t,x,u,z) \qquad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

В (2) n-вектор-функция $\varphi(t,x,u,z)$ описывает внутреннее устройство системы и определена для любых значений векторных переменных $x \in R^n, u \in Q \subseteq R^r, z \in P \subseteq R^l$, множества Q и P заданы априори.

Для каждого конкретного момента времени $\bar{t} \in [t_0, \vartheta)$ ЛПР выбирает некоторое *управляющее воздействие* которое отождествляется с функцией $u = u(t)$ $\left(U \div u(\cdot)\right)$, и принимающей значение при всех $t \in [t_0, \vartheta)$ в *области управления* $Q \subseteq R^r$ - . Множество всех управлений обозначим через **U.**

Одновременно реализуется (независимо от действия ЛПР) *неопределенный фактор* $z = z(t)$ $(Z \div z = z(\cdot))$, $t \in [t_0, \vartheta), z(t) \in P \subseteq R^l$ при всех $t \in [t_0, \vartheta)$, где P - *область значений неопределенности,* $\mathbf{Z}$ – множество всех неопределенностей.

Процесс принятия решения в задаче $\mathbf{\Gamma}$ происходит следующим образом. ЛПР выбирает и использует некоторое конкретное управление $U \div u(\cdot), U \in \mathbf{U}$. Независимо от ЛПР реализуется конкретная неопределенность $Z \div z(\cdot)$, $Z \in \mathbf{Z}$ о которой ЛПР в каждый момент времени *t* известно лишь множество возможных значений *P.* Затем определяется решение $x(t)$ системы (2) при $u = u(t)$, $z = z(t)$. На полученных тройках $x(t)$, $u = u(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta$, определены *N* критериев, заданных функционалами

$$J_i(U,Z) = \int_{t_0}^{\vartheta} F_i(t, x(t), u(t), z(t))dt + \Phi_i(x(\vartheta)), \quad i \in \mathbf{N} = \{1,2,\ldots,N\}. \quad (3)$$

Предпочтительность векторного критерия оценивается с помощью конуса доминирования ***C***. Будем считать, что ЛПР стремится максисмизировать все компоненты своего критерия, поэтому, конус доминирования содержит положительный ортрант пространства $\mathbf{R}^N$, т.е. $C \supseteq \mathbf{R}^N_{\geq}$, где $\boldsymbol{R}^N_{\geq} = \{x \in \boldsymbol{R}^N : x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,N\}$.

Для двух векторов $J^1, J^2 \in \boldsymbol{R}^N$

$$J^1 \leq_C J^2 \Leftrightarrow J^2 - J^1 \in \boldsymbol{C}, \qquad J^1 \not\leq_C J^2 \Leftrightarrow J^2 - J^1 \notin \boldsymbol{C}.$$

Заметим, что $J^1 \leq_C J^2 \Leftrightarrow J^2 \leq_{(-C)} J^1$.

Будем рассматривать выпуклые, замкнутые, конусы с непустой топологической внутренностью, не содержащие начало координат (заостренные). Для таких конусов, указанное отношение является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования [5].

Определение 1. Пару $(U^C, J^C) \in \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{R}^N$ назовем $\boldsymbol{C}$*-гарантированным решением* задачи (1), если существует неопределенность $Z_C \in \boldsymbol{Z}$, такая, что $J^C = J(U^C, Z_C)$ и для любых $U \in \boldsymbol{U}$, $Z \in \boldsymbol{Z}$, будет

$$J(U^C, Z) \not\leq_C J(U^C, Z_C) \text{ и } J(U^C, Z_C) \not\leq_C J(U, Z_C).$$

при этом N-вектор $J(U^C, Z_C)$ назовем $\boldsymbol{C}$*-гарантией* в задаче (1).

Лемма 1. Если существуют постоянные ненулевые векторы $\alpha \in \boldsymbol{C}^*$, где $\boldsymbol{C}^*$ - конус, полярный для заданного конуса $\boldsymbol{C}$, такие, что

$$\max_U \alpha\, J(U, Z_C) = \alpha\, J(U^C, Z_C), \quad \forall U \in \mathrm{U}; \qquad \min_Z \alpha\, J(U^C, Z) = \alpha\, J(U^C, Z_C), \quad \forall Z \in \mathrm{Z};$$

то пара (U^C, Z_C) порождает $\boldsymbol{C}$-гарантированное решение задачи (1).

Данная лемма являтся следствием достаточных условий оптимальности для многогранного конуса, сформулированных в[2].

Задаче (1) поставим в соответствие антагонистическую игру $\boldsymbol{G}(C) = \langle \Sigma, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{Z}, J_\alpha(U, Z) \rangle$. Роль первого игрока выполняет ЛПР, формирующий программные управления $U \in \mathbf{U}$, а второй выбирает программные неопределенности $Z = \mathbf{Z}$. Функция выигрыша имеет вид: $J_\varepsilon(U, Z) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(U, Z)$ где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \boldsymbol{C}^*$.

Утверждение 1. Если пара $(U^C, Z_C) \in \mathbf{U} \times \mathbf{Z}$ - седловая точка антагонистической игры $\mathbf{G}(C)$, то пара (U^C, Z_C) реализует $\boldsymbol{C}$ – гарантированное решение многокритериальной задачи (1).

Для нахождения седловой точки антагонистической игры $\boldsymbol{G}(C)$ применим принцип максимума Понтрягина [6].

Будем предполагать, что в задаче (1) программные стратегии $U \div u(\cdot), U \in \mathbf{U}$ и программные неопределенности $Z \div z(\cdot)$, $Z \in \mathbf{Z}$ являются кусочно-непрерывными на $[t_0 \vartheta]$. Кроме того, предполагаем, что функции $F_i(t,x,u,z)$, $\Phi_i(x)$, $(i \in \mathbf{N})$, $\varphi(t,x,u,z)$ имеют частные производные по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и непрерывны вместе с этими производными по совокупности своих аргументов для $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \overline{Q}$, $z \in \overline{P}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, где $\overline{Q}(\overline{P})$ - замыкание множеств $Q(P)$. При выполнении этих требований принцип максимума для игры $\boldsymbol{G}(C)$ формулируется следующим образом:

Теорема 1. Пусть пара $(U^C, Z_C) \in \mathbf{U} \times \mathbf{Z}$, $(U \div u^*(\cdot), Z \div z_*(\cdot))$ является седловой точкой в игре (11), а $x(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta$ - соответствуещее решение системы (2) при $u = u^*(t)$, $z = z_*(t)$, $\boldsymbol{C}$ – выпуклый конус, $\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}_{\ge}$. Тогда

1) для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, являющихся точками непрерывности управления $u(\cdot)$

$$\max_{u \in Q} H(t, x(t), u, z_*(t), \psi(t)) = H(t, x(t), u^*(t), z_*(t), \psi(t));$$

2) для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, являющихся точками непрерывности неопределенности $z(\cdot)$

$$\max_{z \in P} H(t, x(t), u^*(t), z, \psi(t)) = H(t, x(t), u^*(t), z_*(t), \psi(t)).$$

Здесь $H(t, x, u, z, \psi) = \psi_0 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i F_i(t, x, u, z) + \psi' \varphi(t, x, u, z)$, $\alpha_i \in \boldsymbol{C}^*$, а функция $\psi(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta$ является решением системы

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t), z_*(t), \psi(t))}{\partial x}, \qquad t_0 \le t \le \vartheta$$

с граничным условием

$$\psi(\vartheta) = -\frac{\partial (\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Phi_i(x(\vartheta)))}{\partial x}.$$

3. Модель освоения вводимых производственных мощностей

Рассматривается математическая модель освоения вводимых производственных мощностей из [4,с.57]. Здесь представлено функционирование конкретной экономической системы Σ за период времени $[t_0, \vartheta]$. Обозначим производственную мощность, которая в момент времени t участвует в фактическом производстве через $x(t)$, а вводимую в момент времени t производственную мощность $u(t)$. Уравнение, описывающее изменение производственной мощности $x(t)$ имеет вид:

$$\dot{x} = \gamma(u - x - z), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Здесь постоянная $\gamma > 0$ - коэффициент акселирации, прирост производства при увеличении мощности на единицу, $z(t) \in \mathbf{Z}$ - программная неопределенность. ЛПР выбирает производственную мощность $u(t)$, которую он считает нужным ввести в производство в момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$. На систему влияют внешние факторы, которые могут привести к непредвиденным потерям - $z(t) \in \mathbf{Z}$. На тройках $x(t), u(t), z(t)$ заданы критерии оценки качества функционирования системы Σ следующими функционалами:

$$J_1(u) = -c\int_{t_0}^{\vartheta} u^2 dt, \quad J_2(u) = \int_{t_0}^{\vartheta} (u(t) - x(t) - z(t))^2 dt, \quad J_3(u) = (x(\vartheta) p(\vartheta))^2.$$

Здесь $\sqrt{c} = const$ - затараты на введение мощности, $p(t)$ - условная цена единицы мощности в момент времени. Стремление ЛПР увеличить $J_1(u)$ эквивалентно его желанию уменьшить расходы на введение производственной мощности, увеличение $J_2(u)$ отвечает желанию ЛПР увеличить интенсивность производства, $J_3(u)$ характеризует желание ЛПР достичь наибольшей прибыли.

Пусть задан конус доминирования $\mathbf{C} \supseteq \mathbf{R}^N_{\ge}$. Для данной задачи построим $\boldsymbol{C}$-седловую точку, реализующее $\boldsymbol{C}$- гарантированное решение. Сответственно лемме 1 выберем положительные постоянные $\alpha_i, i=1,2,3$ такие, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in \boldsymbol{C}^*$. Составим скалярный критерий

$$J=J_1(u)+J_2(u)+J_3(u)=-\alpha_1 c\int_{t_0}^{\vartheta}u^2dt+\alpha_2\int_{t_0}^{\vartheta}(u(t)-x(t)-z(t))^2dt+\alpha_3(x(\vartheta)p(\vartheta))^2$$

и введем вспомогательную антагонистическую игру $\boldsymbol{G}(C)$.Допустимые управления и неопределенности удовлетворяют ограничениям: $U_{\min}\le U\le U_{\max}$., $Z_{\min}\le Z\le Z_{\max}$.

Для нахождения седловой точки воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Сначала найдем оптимальную стратегию первого игрока. Построим функцию Гамильтона:

$$H_1=\varphi_{01}(-\alpha_1 cu^2+\alpha_2(u-x-z_*)^2)+\psi_1\gamma(u-x-z_*).$$

Сопряженная система имеет вид:

$$\dot\psi_1=-\frac{\partial H}{\partial x}\Rightarrow\dot\psi_1=2\psi_{01}\alpha_2(u-x-z_*)+\psi_1\gamma. \qquad (5)$$

Из условий экстремума первого порядка

$$u=\frac{1}{2}\frac{2\psi_{01}\alpha_2x+2\alpha_2z_*+\psi_1\gamma}{\psi_{01}(\alpha_1c-\alpha_2)}. \qquad (6)$$

Здесь $\psi_{01}=1$. Условия второго порядка имеют вид $-2\alpha_1c+2\alpha_2<0$. Следовательно, если

1) $\alpha_1c>\alpha_2$, то $u=-\dfrac{1}{2}\dfrac{2\alpha_2x+2\alpha_2z_*+\psi_1\gamma}{(\alpha_1c-\alpha_2)}$, иначе 2) $u=U_{\max}$.

Рассмотрим первый случай. Подставим выражение для u в уравнения (4) и (5). После преобразований получим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot x=-ax(t)+b\psi_1(t)+az_*,\qquad \dot\psi_1=dx(t)-a\psi_1(t)+dz_*, \qquad (7)$$

где $a=-\dfrac{\gamma\alpha_1c}{\alpha_1c-\alpha_2}$, $b=\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma^2}{\alpha_1c-\alpha_2}$, $d=-2\dfrac{\alpha_1\alpha_2c}{\alpha_1c-\alpha_2}$. Будем считать, что $p=const$.

Из условий трансверсальности теоремы 1 $\psi_1(\vartheta)=-2p^2x^2(\vartheta)$.

Будем считать, что $t_0=0$, $\vartheta=1$, $x(0)=1$. Тогда получим следующее решение системы (7).

$$x(t)=(\cos(kt)-l\sin(kt))(z_*+1)+m\sin(kt)z_*,$$

$$\psi_1(t)=-\frac{1}{b}((kl+a)\cos(kt)+(k-al)\sin(kt))(z_*+1)+m(k\cos(kt)-a\sin(kt))z_*. \qquad (8)$$

где $k=\sqrt{-bd-a^2}$, $l=\dfrac{(a-2\alpha_3p^2b)\cos k+k\sin k}{(a-2\alpha_3p^2b)\sin k-k\cos k}$, $m=\dfrac{2\alpha_3p^2b}{(a-2\alpha_3p^2b)\sin k-k\cos k}$.

После подстановки (8) в (6) получим оптимальное управление ЛПР:

$$u(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{(2\alpha_2bl+\gamma al-\gamma k)\sin(kt)-(2\alpha_2b+\gamma kl+\gamma a)\cos(kt)}{b(\alpha_1c-\alpha_2)}(z_*+1)+\right.$$
$$\left.+\frac{(\gamma ma-2\alpha_2mb)\sin(kt)-\gamma mk\cos(kt)-2\alpha_2b}{b(\alpha_1c-\alpha_2)}z_*\right) \qquad (9)$$

Аналогичным образом определим стратегию второго – фиктивного игрока, считая стратегию первого игрока фиксированной. Функция Гамильтона для второго игрока:

$$H_2 = \varphi_{02}(-\alpha_1 c u^{*2} + \alpha_2 (u^* - x - z)^2) + \psi_1 \gamma (u^* - x - z).$$

Сопряженная система имеет вид: $\dot{\psi}_2 = 2\psi_{02}\alpha_2(u^* - x - z) + \psi_2 \gamma$.

Здесь $\psi_{02} = -1$. Из условий экстремума первого порядка

$$z = \frac{1}{2}\frac{2\alpha_2 u^* - 2\alpha_2 x + \psi_2 \gamma}{\alpha_2}. \qquad (10)$$

Условия второго порядка $-2\alpha_2 < 0$ выполняются всегда. После подстановки (10) в уравнения (4) и (20) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \frac{\gamma^2}{2\alpha_2}\psi_2, \qquad \dot{\psi}_2 = 0.$$

Граничные условия: $\psi_2(\vartheta) = -2p^2 x(\vartheta)$. Для $t_0 = 0$, $\vartheta = 1$, $x(0) = 1$, ее решение имеет вид:

$$x(t) = -\frac{\alpha_3 \gamma^2 p^2}{\alpha_3 \gamma^2 p^2 + \alpha_2} t + 1, \qquad \psi_2(t) = -2\frac{\alpha_2 \alpha_3 p^2}{\alpha_3 \gamma^2 p^2 + \alpha_2}. \qquad (11)$$

Подставив выражения из (11) в (10) получаем:

$$z(t) = \frac{\gamma \alpha_3 p^2 (\gamma(t + u^* - 1) + 1) + \alpha_2 (u^* - 1)}{\gamma^2 \alpha_3 p^2 + \alpha_2}. \qquad (12)$$

Таким образом, ***C***-седловая точка находится из системы уравнений: (9) и (12.)

Пусть конус предпочтения многогранный $\boldsymbol{C} = \{J \in \boldsymbol{R}^3 : AJ > 0\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Согласно способу уточнения оптимального по многогранному конусу решния, приведенного в [2], в качестве вектора весовых коэффициентов α возьмем левый собственный вектор-строку матрицы A. Для заданной матрицы он будет равен $(0{,}33;0{,}23;0{,}44)$. Зададим значения остальных параметров: $\gamma = 3$, $c = 6$, $p = 10$. Определим область управления и неопределенности: $-1 \le U \le 1$, $\quad -1 \le Z \le 1$.

Тогда оптимальное управление из (9) при каждой фиксированной неопределенности представлено на рис. 1. Для каждого $t \in [0,1]$ седловая точка лежит на пересечении поверхностей, задающих оптимальное управление (9) при каждой фиксированной неопределенности и минимизирущей стратегии второго игрока из (12) при каждом фиксированном управлении и представлены на рис.2. ***C***-седловая точка $((U^C, Z_C)$, где $U^C \div u^C(t)$, $Z_C \div z_C(t)$, $u^C(t)$ и $z^C(t)$ решения системы уравнений: (9) и (12.) представлена на рис 3. и рис.4.

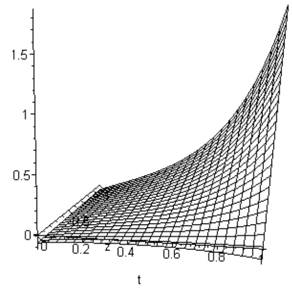

Рис. 1

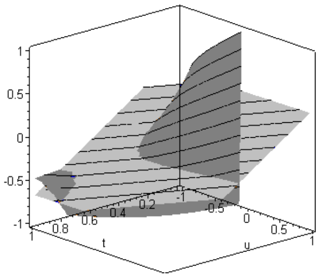

Рис 2

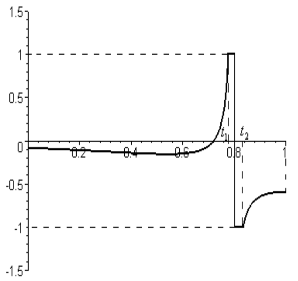

Рис.3

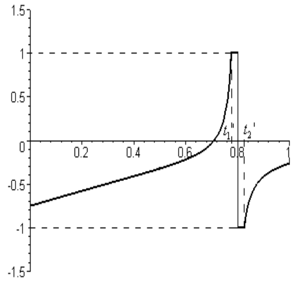

Рис.4

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вишнякова О.М.** Оптимальность по конусу в многокритериальной задаче // Труды Псковского политехнического института. Псков: Изд-во ППИ, 2004. №8.1. - С.7-11.
2. **Вишнякова О.М.** Уточнение максимального по многогранному конусу решения многокритериальной задачи. // Труды Псковского политехнического института.- Псков: Изд-во ППИ, 2004. №9.1. - С.14-18.
3. **Жуковский В.И. Салуквадзе М.Е.** Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. – Тбилиси: «Мецниерба», 1996.
4. **Колемаев В.А.** Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 2002.
5. **Ногин В.Д.** Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход. М.:Физматлит, 2002.
6. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Грамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1982.

В.К.КОШМАК

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ АМОРТИЗАЦИИ

Сравниваются линейная и нелинейная модели амортизации в дискретном и непрерывном времени. Приводится аппроксимация отчислений налога на имущество при нелинейной амортизации. Производится численная проверка предложенной аппроксимации. Поясняются положения налогового кодекса по нелинейной амортизации.

1. Введение

В Налоговом кодексе (НК, ст. 259, п. 1) [1] допускается два способа начисления амортизации для целей налогообложения: линейный для всех амортизационных групп и нелинейный с определенными в НК ограничениями. Ограничения затрагивают здания, сооружения, передаточные устройства со сроком полезного использования свыше 20 лет (НК, ст. 258, п. 3). По остальному имуществу предприятие делает выбор, чаще всего в пользу традиционной линейной амортизации. Для руководства отдельного предприятия разница между двумя способами представляется несущественной и тогда предпочтительнее выглядит более простой.

Выполненная работа позволяет оценить количественно разницу между линейной и нелинейной амортизацией и помочь предприятию сделать обоснованный выбор в пользу того или иного способа.

2. Модель в дискретном времени

При линейном способе амортизационные отчисления начисляются ежемесячно равными долями. Их величина равна