УДК 517.518.5

И. П. Попов

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЯХ, НЕ ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ

Дается определение ограниченной вдоль оси абсцисс комплекснозначной периодической функции. Таковыми являются практически все периодические функции, встречающиеся в технических приложениях. Доказывается, что вопреки соответствию условиям разложимости посредством интеграла Фурье такие функции не подлежат разложению в непрерывный спектр гармоник. Показано, что функция, периодическая на всей вещественной оси, также не представима интегралом Фурье. Доказывается, что ограниченная вдоль оси абсцисс периодическая функция не имеет гармоник в области ее нулевых значений. Показано, что прямоугольная импульсная функция может быть представлена как квазипериодическая и в этой связи не подлежат разложению посредством интеграла Фурье, при этом ее спектр (если он существует) не зависит от величины виртуального периода; это заключение, в частности, распространяется на ступенчатую функцию Хевисайда. Доказывается, что прямоугольная импульсная функция не разлагается на гармоники, не считая нулевой гармоники, равной значению самой прямоугольной импульсной функции; как следствие, не разлагаются на гармоники ступенчатая функция Хевисайда и δ *— функция Дирака. Показано, что ограниченная вдоль оси абсцисс гармоническая функция не подлежит разложению в непрерывный спектр гармоник посредством интеграла Фурье.*

Ключевые слова: *интеграл Фурье, гармоники, период, дискретный спектр, разложение.*

Считается, что почти любую функцию, не являющуюся периодической на протяжении всей числовой прямой, можно представить интегралом Фурье [1–3]. Таковыми являются практически все периодические функции, встречающиеся в технических приложениях, поскольку они имеют начало и конец и поэтому определены лишь на ограниченном интервале, а не на всей числовой прямой [4–7]. При решении вопроса разложимости функции в непрерывный спектр гармоник посредством интеграла Фурье, как правило, решается задача определения классов функций, для которых данное разложение возможно. В соответствии с этим подходом функции должны удовлетворять условиям, аналогичным условиям Дини и Дирихле-Жордана для рядов Фурье [8–10]. В настоящей работе использован противоположный подход — определяются виды функций, которые не могут быть представлены интегралом Фурье. Как будет показано ниже, подходы не являются равнозначными — некоторые функции, подлежавшие разложению в соответствии с первым подходом, не разлагаются в соответствии со вторым.

Теорема 1. Периодическая функция может разлагаться только на гармоники кратных дуг.

Доказательство. Для периодической функции справедливо условие:

$$f(t_j) = f(t_j + T) = f_j, \quad j = (1, 2, ..., l), \quad [1, l] \subset \mathbb{N}.$$

Для всех j можно подобрать $2l$ гармоник *некратных дуг*, удовлетворяющих $2l$ уравнениям:

$$\sum_{k=1}^{2l} c_k e^{i(\omega_k t_j + \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{2l} c_k e^{i\left[\omega_k (t_j + T) + \varphi_k\right]} = f(t_j), \quad (j = 1, 2, \ldots, l), \quad t_j \in [t_1, t_1 + T]\text{К}$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{2l} c_k e^{i(\omega_k t_q + \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{2l} c_k e^{i\left[\omega_k (t_q + T) + \varphi_k\right]} \neq f(t_q), \quad (q = l+1, l+2, \ldots), \quad t_q \in [t_1, t_1 + T].$$

Эти рассуждения не зависят от величины l, которая может быть устремлена в бесконечность. Из этого следует, что $f(t)$ может разлагаться только на гармоники *кратных дуг*. Теорема доказана.

Следствие. Любые два периода периодической функции имеют идентичные наборы гармоник.

Определение. Комплекснозначная функция

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{T}) \equiv \mathrm{f}(\mathrm{x}) & \mathrm{x} \in [\xi, \zeta] \subset \mathrm{R}, \\ 0, \quad \mathrm{x} \notin [\xi, \zeta] \end{cases}$$

является ограниченной вдоль оси абсцисс периодической функцией.

Теорема 2. Ограниченная вдоль оси абсцисс периодическая функция $f(x)$ не представима интегралом Фурье.

Доказательство. Пусть на отрезке $[x_1, x_2] \subset [\xi, \zeta]$, $x_2 = x_1 + T$, $f(x)$ имеет гармоническую составляющую

$$\varphi(x) = c_p e^{ipx}, c_p \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{R}.$$

Ее значение на границах отрезка:

$$\varphi_1 = c_p e^{ipx_1}, \ \varphi_{2-0} = c_p e^{ipx_2}.$$

В силу периодичности $f(x)$ ее значения на отрезке $[x_2, x_3] \subset [\xi, \zeta]$, $x_3 = x_2 + T$, будут такими же, как на предыдущем отрезке. В соответствии со следствием теоремы 1 на втором отрезке имеется эта же гармоническая составляющая φ, которая на границах отрезка имеет значения: $\varphi_{2+0} = c_p e^{ipx_2}$, $\varphi_3 = c_p e^{ipx_3}$.

При этом $\varphi_1 = \varphi_{2+0}$, $\varphi_{2-0} = \varphi_3$.

Поскольку φ непрерывна, $\varphi_{2-0} = \varphi_{2+0}$. Следовательно, $\varphi_1 = \varphi_{2-0}$. Это означает, что на периоде T укладывается целое число периодов любой произвольной гармоники φ. Отсюда следует, что спектр частот гармоник, на которые может быть разложена $f(x)$, является дискретным, в то время как у интеграла Фурье он непрерывен. Следовательно, $f(x)$ не может быть представлена интегралом Фурье. Теорема доказана.

Следствие. Функция, периодическая на всей вещественной оси, не представима интегралом Фурье.

Считается, что для функции

$$\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{g}(\mathrm{x}) \neq 0, & \mathrm{x} \in [\xi, \zeta], \\ 0, \quad \mathrm{x} \notin [\xi, \zeta] \end{cases}$$

представимой интегралом Фурье, ее любая гармоника существует всюду в $(-\infty, \infty)$.

Теорема 3. Для ограниченной вдоль оси абсцисс периодической функции $f(x)$ гармоники существуют только на отрезке $[\xi,\zeta]$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 любая гармоника из отрезка $[\xi,\xi+T]$ имеет в нем целое число периодов, и, будучи распространена на отрезок $[\xi-T,\xi]$, имеет в последнем такое же распределение фаз относительно границ отрезка, как и на отрезке $[\xi,\xi+T]$. Это вытекает из равенства отрезков. Следовательно, суммы всех гармоник на обоих отрезках будут одинаковыми, и на отрезке слева от ξ функция повторит форму функции справа от ξ, что противоречит определению ограниченной вдоль оси абсцисс периодической функции. То же справедливо по отношению к правой границе отрезка $[\xi,\zeta]$. Таким образом, за пределами отрезка $[\xi,\zeta]$ $f(x)$ гармоник не имеет. Теорема доказана.

Теорема 4. Прямоугольная импульсная функция

$$\mathrm{p(x)} = \begin{cases} \mathrm{P = const}, & \mathrm{x} \in [\xi, \zeta], \\ 0, & \mathrm{x} \notin [\xi, \zeta] \end{cases}$$

не представима интегралом Фурье.

Доказательство 1. Отрезок $[\xi,\zeta]$ может быть разбит на n равных отрезков (виртуальных периодов). При этих обстоятельствах $p(x)$ удовлетворяет определению ограниченной вдоль оси абсцисс периодической функции. В соответствии с теоремой 3 за пределами отрезка $[\xi,\zeta]$ ни одна из гармоник не существует, в то время как для интеграла Фурье гармоники должны существовать всюду. Теорема доказана.

Доказательство 2. Пусть $p(x)$ представима интегралом Фурье. При разбиении отрезка $[\xi,\zeta]$ на конечное число n равных отрезков (виртуальных периодов) субимпульс $p_i(x)$, соответствующий любому периоду, можно рассматривать как прямоугольную импульсную функцию, отличающуюся от исходной только продолжительностью. Поэтому так же как и для исходной функции, можно допустить, что он представим интегралом Фурье, все гармоники которого имеют периоды в n раз меньшие, чем периоды соответствующих гармоник исходной функции $p(x)$. В соответствии с теоремами 1 и 2 гармоники субимпульса $p_i(x)$ (если они существуют) образуют только дискретный спектр, следовательно, гармоники исходной импульсной функции (если они существуют) тоже образуют только дискретный спектр, что не совместимо с представлением интегралом Фурье. Теорема доказана.

Замечание. Спектр исходной прямоугольной импульсной функции $p(x)$ (если он существует) не зависит от числа разбиений отрезка $[\xi,\zeta]$. Действительно, период первой гармоники субимпульса $\frac{\zeta-\xi}{n}=T$ (если она существует) определяется выражением

$$\frac{\zeta-\xi}{n}=T,$$

а период первой гармоники $p(x)$ (если она существует) в n раз больше.

Следствие. Ступенчатая функция Хевисайда

$$\Upsilon_{-}(x)=\begin{cases}1, & \text{при } x>0,\\ 0, & \text{при } x<0\end{cases}$$

не представима интегралом Фурье.

Ступенчатую функцию можно рассматривать как предельный случай прямоугольной функции при $\zeta\to\infty$.

Во избежание рассмотрения бесконечно больших периодов n тоже можно устремить в бесконечность, связав его определенным образом с ζ. Пусть, например,

$$\zeta-\xi=qn+r,\ q,r\in\mathbb{R}.$$

$$n=\frac{\zeta-\xi-r}{q}$$

Тогда (виртуальный) период функции

$$T=\lim_{\zeta\to\infty}\frac{\zeta-\xi}{n}=\lim_{\zeta\to\infty}\frac{q\zeta-q\xi}{\zeta-\xi-r}=q$$

Теорема 5. Прямоугольная импульсная функция не разлагается на гармоники, не считая нулевой гармоники, равной значению самой прямоугольной импульсной функции.

Доказывается прямой подстановкой в формулы для коэффициентов гармоник ряда Фурье.

Следствие 1. Ступенчатая функция не разлагается на гармоники.

Следствие 2. δ-функция Дирака не разлагается на гармоники.

δ-функция представляет собой предельный случай прямоугольной импульсной функции с единичной площадью при стремлении продолжительности импульса к нулю.

С другой стороны, δ-функция равна производной единичной ступенчатой функции. Если бы δ-функция имела гармоники, то они были бы производными гармоник ступенчатой функции. Но последняя не имеет гармоник или ее гармоники всюду равны нулю. Следовательно и гармоники δ-функции также всюду равны нулю.

Теорема 6. Ограниченная вдоль оси абсцисс периодическая функция

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ipx}, & \text{при } x\in[\xi,\zeta],\ A\in\mathbb{C}\\ 0, & \text{при } x\notin[\xi,\zeta]\end{cases}$$

имеет на $[\xi,\zeta]$ единственную гармонику Ae^{ipx}.

Доказывается прямой подстановкой в формулы для коэффициентов гармоник ряда Фурье.

Литература

1. Katznelson Y. An introduction to harmonic analysis. N. Y.: Dover publications, 1976.
2. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его применения. М.: ФМ, 1963.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: ОГИЗ, 1948.
4. Popov I. P. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. Iss. 4. P. 393–395.

5. Попов И. П. Свободные гармонические колебания в электрических системах с однородными реактивными элементами // Электричество. 2013. № 1. С. 57–59.
6. Попов И. П. Групповая скорость волнового пакета, образованного двумя свободными идентичными частицами с разными нерелятивистскими скоростями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 3 (35). С. 69–72.
7. Попов И. П. Колебательные системы, состоящие только из инертных или только упругих элементов, и возникновение в них свободных гармонических колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 95–103.
8. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: ИЛ, 1948.
9. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
10. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1985.

Об авторе

Попов Игорь Павлович — старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты», Курганский государственный университет, Россия.
E-mail: ip.popow@yandex.ru

I. Popov

ON SOME FUNCTIONS, WHICH CANNOT BE PRESENTED BY FOURIER INTEGRAL

In the paper we give the definition of the complex-periodic function limited along the x-axis. These are almost all the periodic functions one can encounter in technical applications. We prove that such functions cannot be decomposed into a continuous spectrum of harmonics via Fourier integral despite the existence of conditions, appropriate for such a decomposition. It is shown that a function, which is periodic along the whole real axis, cannot be represented via Fourier integral. It is proved, that a periodic function, limited along the x-axis, has no harmonics in its zero-value region. We show that a rectangular pulse function can be represented as a quasi-periodic function and therefore cannot be a subject for the decomposition via Fourier integral, in which connection, its spectrum (in case it exists) does not depend on the quantity of the virtual period; this conclusion, in particular, may be applied to Heaviside step function. It is proved that a rectangular pulse function cannot be decomposed into harmonics, except the zero harmonic, which is equal to the value of the rectangular pulse function itself; consequently, Heaviside step function and Dirac δ *-function cannot be decomposed into harmonics. It is shown that a harmonic function limited along the x-axis cannot be decomposed into a continuous spectrum of harmonics via Fourier integral.*

Keywords: *Fourier integral, harmonics, period, discrete spectrum, decomposition.*

About the author

Igor' Popov — senior lecturer of the Department of Technology of Mechanical Engineering, Metal-cutting Machines and Tools, Kurgan State University, Russia
E-mail: ip.popow@yandex.ru