МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА И ИХ ПРЕПОДАВАНИЕ

УДК 372.851

Т. А. Гаваза

«ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ» ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ. МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

Рассматривается вопрос о методике обучения решению задач по теории вероятностей, которые можно отнести к разряду сложных. Предлагается схема работы с задачами по теории вероятностей, в которых используются формулы комбинаторики, формула полной вероятности и формула Бернулли. Предложенная схема позволит сделать процесс обучения решению задач более успешным.

Ключевые слова: *классическое определение вероятности, формулы комбинаторики, полная вероятность, формула Бернулли.*

В работе [1] описаны методические приемы, связанные с обучением решению простейших задач по теории вероятностей. К ним можно отнести задачи на классическое определение вероятности без комбинаций и без использования формул комбинаторики, задачи на использование теоремы произведения и теоремы суммы вероятностей. В настоящей статье представлен опыт по обучению решению задач, которые вызывают затруднения и ошибки не только у учащихся, но и у учителей математики. Это задачи с использованием формул комбинаторики, задачи на полную вероятность, формулу Байеса и задачи с использованием формулы Бернулли.

Рассмотрим четыре группы подобных задач.

Группа 1. Задачи с комбинациями, количество которых можно найти методом перебора.

Задача 1.1 [2]. Игральный кубик бросают 2 раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел будет равна 6?

Как было отмечено ранее, «к основным понятиям теории вероятностей относятся стохастический (случайный) эксперимент, событие и вероятность» [1, С. 87], и способ нахождения вероятности зависит от первых двух понятий. Используя приведенный в этой работе алгоритм [1, С. 90], решим задачу:

1) стохастический эксперимент — бросание кубика;
2) событие — сумма очков равна 6 (математическая модель — $x + y = 6$);
3) всевозможные исходы — пара чисел;
4) благоприятные исходы — пара чисел, сумма которых равна 6.

Таким образом, всевозможные и благоприятные исходы — это комбинации чисел. Для нахождения количества комбинаций, в силу небольшого количества и возможности представить их наглядно, можно использовать метод перебора. Чтобы перебор был упорядоченным, используем таблицу комбинаций:

Количество выпавших очков. Второе бросание	Количество выпавших очков. Первое бросание					
	1	2	3	4	5	6
1	1	3	4	5	**6**	7
2	3	4	5	**6**	7	8
3	4	5	**6**	7	8	9
4	5	**6**	7	8	9	10
5	**6**	7	8	9	10	10
6	7	8	9	10	11	11

На пересечении строк и столбцов — сумма очков. Как видно из таблицы, число благоприятных исходов равно 5, количество всевозможных исходов равно 36. Вероятность события $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{36}$.

Задача 1.2 [4]. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Меркурий» по очереди играет с командами «Марс», «Юпитер» и «Уран». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах право владеть мячом выиграет команда «Меркурий».

Решение:

1) стохастический эксперимент — бросание монеты;

2) событие — два раза выпадет «орел» (при условии, что «Меркурию» соответствует «орел»);

3) всевозможные исходы — комбинация (x, y, z), где x, y, z могут принимать значения «орел», «решка»;

4) благоприятные исходы — комбинация (о, о, р).

Таким образом, всевозможные и благоприятные исходы — это комбинации букв «о» и «р». Для нахождения количества комбинаций, в силу их небольшого числа и возможности представить их наглядно, можно использовать метод перебора. Чтобы перебор был упорядоченным, используем дерево комбинаций (см. рис.1):

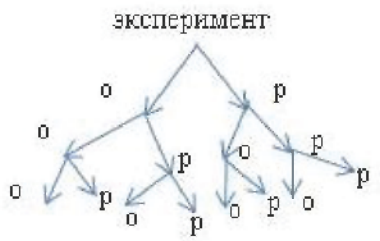

Рис. 1

Как видно из схемы, число благоприятных исходов равно 3, количество всевозможных исходов равно 8 (количество веточек последнего яруса). Вероятность события $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}=0{,}125$.

Группа 2. Задачи с комбинациями, количество которых можно найти только по формулам комбинаторики.

Задача 2.1 [2]. Из букв слова «провал» наугад выбираются 5 букв. Найдите вероятность того, что из выбранных букв можно будет составить слово «повар».

Решение:

1) стохастический эксперимент — выбор букв;

2) событие — получится слово «повар»;

3) всевозможные исходы — комбинация (x, y, z, t, v), где x, y, z, t, v — буквы слова «провал»;

4) благоприятные исходы — слово «повар».

Таким образом, всевозможные и благоприятные исходы — это комбинации букв. Для нахождения числа всевозможных исходов затруднительно использовать метод перебора комбинаций в силу их большого количества. Для вычисления должна быть использована формула комбинаторики, а именно формула размещения без повторений $A_6^5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Число благоприятных исходов равно 1. Вероятность события $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$.

Таким образом, при решении задач, где проводится один стохастический эксперимент, а событием является комбинация, необходимо в первую очередь определить «сложность» комбинации. Если комбинация — это пара элементов, то рекомендуется использовать метод перебора с помощью таблицы комбинаций. Если комбинация получается в ходе последовательного наступления событий (бросание монеты), то для нахождения количества благоприятных и всевозможных исходов можно воспользоваться деревом комбинаций.

Если комбинация содержит большое количество элементов и (или) соответствует характеристикам задач на размещение, перестановку или сочетание, то используются формулы комбинаторики. Основная проблема при решении задач с формулами комбинаторики заключается в том, что учащиеся плохо ориентируются в типах комбинаторных задач, и требуется немало времени для формирования навыка решения комбинаторных задач, что не соответствует количеству часов, отведенных на изучение данной темы в школьном курсе математики.

Группа 3. Задачи на полную вероятность и формулу Байеса.

Рассмотрим две задачи:

Задача 3.1. В первой коробке лежат 5 синих и 4 красных шарика, во второй коробке — 4 синих и 5 красных шариков. Случайным образом выбирается шарик. Какова вероятность, что он синий?

Анализ условия:

Стохастический эксперимент: выбор коробки — выбор шарика из коробки.

Событие: шарик синий.

3.2 [3]. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45 % этих стекол, вторая — 55 %. Первая фабрика выпускает 3 % бракованных стекол, а вторая — 1 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Анализ условия:

Стохастический эксперимент: выпуск стекла на фабрике — выбор стекла.

Событие: стекло бракованное.

Как видно из анализа условий, общее в приведенных выше задачах это наличие двух этапов в стохастическом эксперименте и одного события.

Задачи такого типа решаются при помощи формулы полной вероятности: $p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + ... + p(H_k) \cdot p(A/H_k)$. Однако сама формула не является обязательной для изучения в школьном курсе математики, и ее применение вызывает затруднения не только у учащихся, но и у педагогов. Решение задачи на полную вероятность можно сделать простым и наглядным, если использовать стохастическое дерево, теорему суммы и произведения вероятностей.

Рассмотрим **решение первой задачи**, введя дополнительные обозначения: результаты первого этапа эксперимента будем называть гипотезами и обозначать H_1 и H_2. Первая гипотеза H_1 — выбор первой коробки. Вероятность выбора первой гипотезы $p(H_1) = 0{,}5$. Вторая гипотеза H_2— выбор второй коробки. Вероятность выбора второй гипотезы $p(H_2) = 0{,}5$.

Вероятность того, что шарик синий, если он будет выбран из первой коробки

$$p(A/H_1) = \frac{5}{9}.$$

Вероятность того, что шарик синий, если он будет выбран из второй коробки

$$p(A/H_2) = \frac{4}{9}.$$

Построим стохастическое дерево (см. рис. 2):

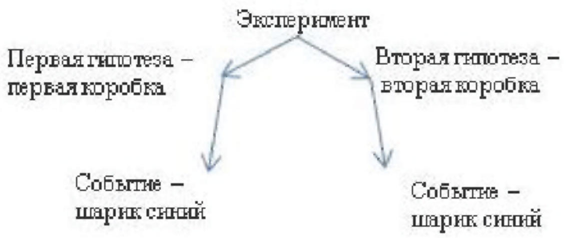

Рис. 2

Вероятность наступления события находится по теореме произведения и теоремы суммы. Умножаются вероятность выбора гипотезы и вероятность наступления события при этом условии (вероятности, расположенные на «одной веточке»). Складываются полученные произведения (вероятности, расположенные на «разных веточках»). Данные действия соответствуют формуле полной вероятности, в результате получаем: $p(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = 0{,}5$.

Решение второй задачи.

Гипотеза H_1 — стекло выпущено первой фабрикой, $p(H_1) = 0{,}45$.

Гипотеза H_2 — стекло выпущено второй фабрикой, $p(H_2) = 0{,}55$.

Вероятность того, что стекло с дефектом, если оно выпущено на первой фабрике, $p(A/H_1) = 0{,}03$.

Вероятность того, что стекло с дефектом, если оно выпущено на второй фабрике, $p(A/H_2) = 0{,}01$.

Построим стохастическое дерево:

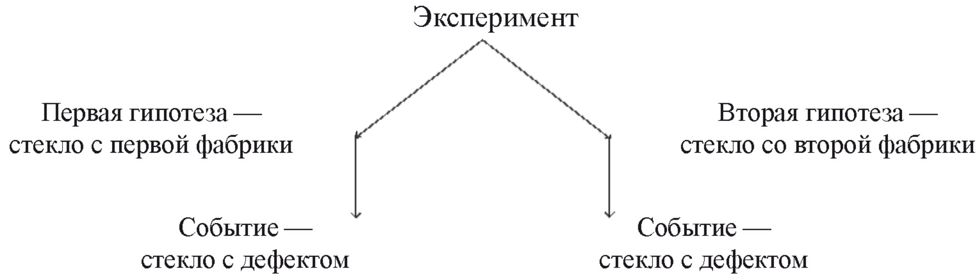

Рис. 3

По формуле полной вероятности $p(A) = 0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}019$.

Таким образом, при решении задач на полную вероятность можно использовать следующий алгоритм:

1. Определить стохастический эксперимент.
2. Определить этапы эксперимента (их два).
3. Определить гипотезы — результат первого этапа эксперимента, их количество.
4. Найти вероятности выбора гипотез.
5. Определить событие.
6. Найти вероятность наступления события при определенной гипотезе.
7. Построить стохастическое дерево. Количество веточек первого яруса соответствует количеству гипотез. От каждой гипотезы отходит веточка, соответствующая событию. Расставить вероятности.
8. Найти полную вероятность события, используя стохастическое дерево, теорему суммы и произведения.

С задачами на полную вероятность непосредственно связаны задачи на формулу Байеса. Рассмотрим следующую задачу:

3.3. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45 % этих стекол, вторая — 55 %. Первая фабрика выпускает 3 % бракованных стекол, а вторая — 1 %. Найдите вероятность того, что бракованное стекло, купленное в магазине, произведено на первой фабрике.

Вопрос этой задачи отличается от вопроса задачи 3.2 тем, что событие уже произошло (стекло бракованное), необходимо определить вероятность реализации конкретной (а именно первой) гипотезы. Для нахождения вероятности используется формула Байеса:

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{p(A)};$$

где в числителе — произведение вероятностей, находящихся на веточке стохастического дерева, соответствующей рассматриваемой гипотезе, а в знаменателе — полная вероятность.

Решение задачи 3.3. По условию задачи первая гипотеза — стекло произведено на первой фабрике. Следовательно, $i = 1$, и по формуле Байеса $p(H_1/A) = \dfrac{p(H_1)\cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \dfrac{0,45\cdot 0,03}{0,019} \approx 0,07$ — вероятность того, что бракованное стекло выпущено на первой фабрике.

По формуле Байеса решается и задача 3.4 [3]. На фабрике керамической посуды 10 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов.

Решение:

1. Стохастический эксперимент проходит в два этапа.

Первый этап — производство тарелок. Первая гипотеза H_1 — тарелка с дефектом. Вероятность выбора первой гипотезы $p(H_1) = 0,1$. Вторая гипотеза H_2 — тарелка без дефектов. Вероятность выбора второй гипотезы $p(H_2) = 0,9$.

Второй этап — контроль качества. Событие — тарелка без дефектов. Для первой гипотезы $p(A/H_1) = 0,2$. Для второй гипотезы $p(A/H_2) = 1$.

2. По формуле полной вероятности $p(A) = 0,1\cdot 0,2 + 0,9\cdot 1 = 0,92$ — вероятность того, что случайно выбранная тарелка будет без дефекта.

3. Тарелка выбрана, то есть событие произошло. Необходимо найти вероятность реализации второй гипотезы (тарелка произведена без дефекта).

По формуле Байеса $p(H_2/A) = \dfrac{p(H_2)\cdot p(A/H_2)}{p(A)} = \dfrac{0,9\cdot 1}{0,92} \approx 0,98$ — вероятность того, что тарелка произведена без дефекта.

Группа 4. Задачи на формулу Бернулли.

Рассмотрим еще один тип задач, который можно отнести к «трудным» задачам по теории вероятностей. Это задачи на формулу Бернулли.

Задача 4.1. Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей будет бракованной, равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажутся бракованными.

Проведем анализ условия.

1. Стохастический эксперимент — выбор детали. Эксперимент имеет только 2 исхода — деталь бракованная, деталь не бракованная. Эксперимент проводится 3 раза.

2. Событие — деталь бракованная. Вероятность наступления события в каждом эксперименте равна 0,2. Событие должно наступить ровно два раза из трех.

Данная задача может быть решена двумя способами.

Первый способ: составить все комбинации двух бракованных и одной не бракованной детали, для нахождения искомой вероятности использовать теорему суммы и теорему произведения вероятностей.

Второй способ: использовать формулу Бернулли $p(n,k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, где p — вероятность наступления события в ходе одного эксперимента, n — количество экспериментов, k — количество наступлений события в ходе экспериментов, C_n^k — число сочетаний. *Замечание:* Данная формула используется в том случае, если эксперимент имеет только два взаимоисключающих исхода, и вероятность наступления события во всех экспериментах одинаковая.

Решим задачу 4.1 вторым способом. По условию $n = 3$, $k = 2$, $p = 0{,}2$. По формуле Бернулли $p(3{,}2)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_3^2\cdot 0{,}2^2\cdot(1-0{,}2)^{3-2}=0{,}096$ — вероятность того, что две детали из трех будут бракованными.

Таким образом, для решения задачи на формулу Бернулли можно использовать следующий алгоритм:

Определить вид эксперимента.

Если эксперимент имеет только два противоположных исхода (является испытанием Бернулли), то определить количество экспериментов n.

Определить событие (успех), количество успехов k.

Определить вероятность наступления события в ходе одного эксперимента p. Если она одинаковая для всех экспериментов, то можно использовать формулу Бернулли: $p(n,k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

В заключение необходимо отметить, что для успешного решения «трудных» задач по теории вероятностей, как следует из материала статьи, необходимо обязательно проводить анализ условия, определяя характеристики эксперимента и события. Для наглядности при решении можно использовать таблицы комбинаций, дерево комбинаций и стохастическое дерево. Приведенные выше алгоритмы могут быть использованы для обучения решению «трудных» задач. Однако для решения задач, содержащих элементы комбинаторики, требуется дополнительная подготовка учащихся.

Литература

1. Гаваза Т. А. О преподавании теории вероятностей в средней школе. Методический аспект // Вестник Псковского государственного университета. Серия «Естественные и физико-математические науки». Вып. 4. Псков: Издательство ПсковГУ, 2014. С. 87–92.
2. Ершова А. П., Голобородько В. В. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10–11 классов. 5-е изд., испр. М.: ИЛЕКСА, 2011. 224 с.
3. Ларин Александр Александрович. Математика. Репетитор. [Электронный ресурс]. URL: https:// www. alexlarin.net
4. Ященко И. В., Высоцкий И. Р., Забелин А. В. и др. ЕГЭ: 4000 задач с ответами по математике. Все задания. Базовый и профильный уровни / Под. ред. И. В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2015. 687 с.

Об авторе

Гаваза Татьяна Анатольевна — кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, физико-математический факультет, Псковский государственный университет, Россия.

E-mail: tag-148@mail.ru